Examinatio I zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK WiSe 2022/23

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld

10. Februar 2023 PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Name: ____________________

Matrikelnr.: ____________________

Studiengang: ____________________

#	K0	K1	K2	K3	K4	K5	K6	Σ
Pkte								
Korr								

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Bearbeiten Sie die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Schreiben Sie auf *jedes* Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die Klausur ist mit 35 oder mehr Punkten garantiert bestanden.

[K0] *Kurzfragen* **[2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte]**

Antworten Sie je in ein bis zwei Zeilen.

(a) Welche Matrizen M haben die Eigenschaft $M^{-1} = M^{\intercal}$?
(b) Welcher Zusammenhang gilt zwischen Kraft und Potential bei einem konservativen Kraftfeld?
(c) Welche Fläche hat ein durch zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespanntes Parallelogramm?
(d) Geben Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ an. Hierbei sind φ und $R > 0$ reell.
(e) Vereinfachen Sie $\int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin\vartheta\, f(\cos\vartheta)$ mit Hilfe der Integration durch Substitution.

[K1] *Kraftfeld* **[3 + 2 + 3 = 8 Punkte]**

Betrachten Sie im dreidimensionalen Raum das Potential $V(\vec{r}) = -(\vec{a}\cdot\vec{r})/r^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $\vec{a}$ ein konstanter Vektor und $r = |\vec{r}|$ ist.

(a) Berechnen Sie das zugehörige Kraftfeld.
(b) Geben Sie für allgemeines n diejenigen Ortsvektoren $\vec{r}$ an, für die die Kraft senkrecht auf ihnen steht, also $\vec{F} \perp \vec{r}$ ist.
(c) Für welches n gilt, dass die Kraft immer senkrecht auf dem Ortsvektor steht, dass also $\vec{F} \perp \vec{r}$ ist? Was bedeutet dies für die Arbeit, die bei einer *radialen* Bewegung verrichtet werden muss?

[K2] *Eigenwerte und Eigenvektoren* **[5 + 2 + 3 = 10 Punkte]**

Eine Punktmasse m bewege sich unter Wirkung der Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = -m\,\omega^2\,\hat{M}\,\vec{r}$ mit $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Hauptachsen des Systems, indem Sie die normierten Eigenvektoren der Matrix M sowie die zugehörigen Eigenwerte berechnen.
(b) Bestimmen Sie das zugehörige Potential.
(c) Bestimmen Sie zu den Anfangsbedingungen $\vec{r}\,'(t{=}0) \doteq (0,0,0)^{\intercal}$, $\dot{\vec{r}}\,'(t{=}0) \doteq (0,v,0)^{\intercal}$ die Lösung der Bewegungsgleichung für $\vec{r}\,'(t) \doteq (x'(t), y'(t), z'(t))^{\intercal}$ im Hauptachsensystem.

[K3] *Vektoren und Bahnkurven* **[3 + 4 + 3 = 10 Punkte]**

Eine Sonde der Masse m wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Höhe $y = h$ unter einem Winkel $-\varphi$ relativ zur Horizontalen mit Geschwindigkeit v_0 abgeworfen und bewegt sich anschließend unter dem Einfluss der Schwerkraft.

(a) Skizzieren Sie die Anordnung und geben Sie den Startpunkt $\vec{r}_0$ und die Startgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ als Vektoren an. *Hinweis*: Das Problem ist zweidimensional.
(b) Geben Sie $\vec{r}(t)$ an und bestimmen Sie die Zeit τ, bei der die Sonde auf den Boden ($y = 0$) auftrifft.
(c) Geben Sie die horizontale Entfernung $x(\tau)$ zwischen Abwurf- und Aufschlagspunkt der Sonde an. Was ergibt sich für $\varphi = 0$?

[K4] *Differentialgleichung* **[2 + 2 + 3 + 3 + 2 = 12 Punkte]**

Wir betrachten den schrägen Wurf mit Stokesscher Reibung $\vec{F}_r = -\beta\,\vec{v}$. Ferner wirkt die Gewichtskraft $\vec{F}_g = -m\,g\,\vec{e}_z$. Das Problem kann zweidimensional betrachtet werden, also in der xz-Ebene.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Komponenten v_x und v_z der Geschwindigkeit auf.
(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für v_x mit Hilfe eines Exponentialansatzes.
(c) Geben Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung für v_z an. Begründen Sie diese mit Hilfe eines einfachen physikalischen Arguments.
(d) Ihre Lösung aus (b) ist auch die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung für v_z. Geben Sie die allgemeine Lösung für $\vec{v}(t)$ an und bestimmen Sie die Konstanten mit Hilfe der Anfangsbedingung eines Wurfes mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Wurfwinkel φ zur x-Achse.
(e) Entwickeln Sie Ihre Lösung $\vec{v}(t)$ in eine Taylorreihe um $\beta = 0$ bis zur ersten Ordnung in β. Erläutern Sie, ob der Term nullter Ordnung Ihrer Erwartung entspricht.

Bitte wenden!

[K5] *Gravitation* **[$5 + 5 + 2 = 12$ Punkte]**

Im dreidimensionalen Raum sei als extrem vereinfachtes Modell einer Galaxie eine zweidimensionale scheibenförmige Massenverteilung in der xy-Ebene mit Radius R und konstanter Massendichte $\sigma =$ Masse pro Fläche gegeben.

(a) Rechnen Sie das Gravitationspotential $V(z)$ aus, das eine Raumsonde der Masse m bei Bewegung entlang der Symmetrieachse ($x{=}y{=}0$) erfährt. *Hinweis*: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten (ρ', φ', z') mit $x' = \rho' \cos\varphi'$, $y' = \rho' \sin\varphi'$ und $\mathrm{d}^3r' = \rho'\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}z'$. Es ist dann $V(z) \equiv V(\vec{r}{=}z\,\vec{e}_z) = -\gamma\, m \int \mathrm{d}^3r'\, \frac{\delta(z')\,\sigma}{|z\,\vec{e}_z - \vec{r}\,'(\rho',\varphi',z')|}$.

(b) Zeigen Sie, dass für sehr große Abstände $z \gg R$ das Potential die Form des Newtonschen Gravitationspotentials einer Punktmasse M im Ursprung annimmt, wobei M die Gesamtmasse der Scheibe ist.

(c) Welche Mindestgeschwindigkeit v_∞ müsste die Raumsonde am Ursprung haben, um das System für immer verlassen zu können?

[K6] *Indexnotation* **[$4 + 4 = 8$ Punkte]**

Es seien drei antisymmetrische Matrizen gegeben, $A_{ij} = \epsilon_{ijp}\, a_p$, $B_{kl} = \epsilon_{klq}\, b_q$ und $C_{mn} = \epsilon_{mnr}\, c_r$. Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{sp}(A\,B\,C)$ und drücken Sie das Ergebnis durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

(b) Es sei D die Dyade $D = \vec{a} \circ \vec{b}$. Berechnen Sie $-\mathrm{sp}(D\,C)$ und drücken Sie das Ergebnis durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.